双曲型混合問題のL^2-Well-Posednessについて (位相解析的方法による偏微分方程式の研究)

坂本, 礼子

数理解析研究所講究録
160巻 1972年 48-60

双曲型混合問題の L^2-well-posedness について

奈良女子大　坂本礼子

はじめに　強双曲型方程式は，いかなる境界条件のもとで L^2-well posed になるかという問題について，必要条件・十分条件の両面から研究がすすめられてきた。とくに定数係数，半空間の場合には，上見－日田による，L^2-well-posedness が成り立つための必要十分条件の1つの定式化がある。それは，(t, y) についての Laplace-Fourier 変換によって得られるパラメーターつきの常微分方程式にかんする一様 L^2-well-posedness であった。しかしそれは一様ロパチンスキー条件とのかかわりをあまり明確にするものではなかったように思われる。ここでは，そのような点を問題にしながら，元の方程式によってかなり直接的に求められる代数的量によって L^2-well-posedness を特徴づけることを試みた。

問題　$t>0,\ x>0,\ y\in R^{n-1}$ において，

$$
(P)\begin{cases}
A(D_t, D_x, D_y)u = f \\
B_j(D_t, D_x, D_y)u\big|_{x=0} = 0 & j=1,\cdots,\mu \\
D_t^j\, u\big|_{t=0} = 0 & j=0,1,\cdots,m-1
\end{cases}
$$

この問題に対する L^2-well-posedness とは：任意の $T>0$ に対して，$C_T>0$ が存在して，$C_T \to 0\ (T\to +0)$ かつ

$$\sum_{i+j+|\nu|\leq m-1} \int_0^T dt \int_{R_+^n} |D_t^i D_x^j D_y^\nu u(t,x,y)|^2 dx dy$$
$$\leq C_T \int_0^T dt \int_{R_+^n} |f(t,x,y)|^2 dx dy$$

が成り立つときをいうことにしよう。

<u>仮定</u>　A：m次同次，B_j：r_j次同次$\overbrace{}^{(0\leq r_j\leq m-1)}$であって，

i) Aはt軸の方向に強双曲型，

ii) $x=0$はAの特性面でない，

iii) $\{A, B_j\}$は，ロパチンスキー条件（Hershの条件）をみたす。

いま，(t,y)についてLaplace-Fourier変換すれば，問題は

$$\begin{cases} A(\tau,\eta;D_x)\hat{u}(x)=\hat{f}(x), & x>0 \\ B_j(\tau,\eta;D_x)\hat{u}(0)=0, & j=1,\cdots,\mu \end{cases}$$

となる。これに対するGreen函数を$G(\tau,\eta;x,y)$とかくと，これの$\hat{f}\in L^2$に対するL^2解は，

$$\hat{u}(x)=\int_0^\infty G(\tau,\eta;x,y)\hat{f}(y)\,dy, \quad x>0$$

と表わせる。そのとき，上見－白田の考察から，つぎのことがいえている。

<u>補題</u>　(P)に対してL^2-well-posednessが成り立つための必要十分条件は，

$$\|G(\tau,\eta;x,y)\| \Rightarrow \sum_{k=0}^{m-1}\left\|\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^k G(\tau,\eta;x,y)\right\|_{\mathcal{L}(L^2,L^2)} \leqq \frac{C}{|\mathrm{Im}\,\tau|}$$

$$(\ \tau\in C^1,\ \mathrm{Im}\,\tau<0,\ \ \eta\in R^{n-1},\ |\tau|^2+|\eta|^2=1\ )$$

である。ただし，Cは(τ,η)に無関係である。したがってまた

$$G(\tau,\eta;x,y)=\frac{1}{2\pi}\int\frac{e^{i(x-y)\xi}}{A(\tau,\xi,\eta)}d\xi-G_e(\tau,\eta;x,y)$$

とおけば，上の条件においてGをG_eでおきかえてよい。

ここでは，この事実を出発点として考察していく。

§1. 必要条件について.

<u>1.1.</u> 準備. いま，実点(σ_0,η_0)をとめて，$A=0$のξに関する実根を$\{\xi_i\ (m_i\text{重根})\}_{i=1,\cdots,N}$とする。そのとき，その近傍$U$で

$$A(\tau,\eta;\xi)=\prod_{i=1}^{N}H_i(\tau,\eta;\xi)\,E(\tau,\eta;\xi)=H\cdot E,$$

$$H_i(\tau,\eta;\xi)=(\xi-\xi_i)^{m_i}+a_{i1}(\tau,\eta)\,(\xi-\xi_i)^{m_i-1}+\cdots+a_{im_i}(\tau,\eta),$$

$$(a_{ij}(\tau,\eta):\ \text{正則},\quad a_{ij}(\sigma_0,\eta_0)=0\ )$$

なる分解ができる。また，仮定から，

$$\begin{cases} a_{ij}(\sigma,\eta)\ \ ((\sigma,\eta)\in R\cap U)\ \text{は実数値}, \\ \frac{\partial}{\partial\tau}a_{im_i}(\tau,\eta)\neq 0, \end{cases}$$

なる性質をもっていることがわかる。さて，$0<\theta<1$を1つ

とめたとき,

$$\Delta_i:\ \left|\frac{\partial a_{im_i}(\sigma_0,\eta_0)}{\partial\tau}(\tau-\sigma_0)+\frac{\partial a_{im_i}(\sigma_0,\eta_0)}{\partial\eta}\cdot(\eta-\eta_0)\right|$$
$$\geqq \theta\left(\left|\frac{\partial a_{im_i}(\sigma_0,\eta_0)}{\partial\tau}\right|^2+\left|\frac{\partial a_{im_i}(\sigma_0,\eta_0)}{\partial\eta}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\times d$$
$$\left(\ d=\mathrm{dis}\{(\tau,\eta),(\sigma_0,\eta_0)\}\ \right)$$

とおく。また,

$$\Delta_{i\delta}=\{d<\delta,\ \mathrm{Im}\,\tau<0\}\cap\Delta_i \qquad (m_i\geqq 2\ のとき)$$
$$=\{d<\delta,\ \mathrm{Im}\,\tau<0\} \qquad (m_i=1\ 〃\ ),$$

また, $\Delta_{i\delta}$ の部分であって

$$\frac{\partial a_{im_i}(\sigma_0,\eta_0)}{\partial\tau}(\mathrm{Re}\,\tau-\sigma_0)+\frac{\partial a_{im_i}(\sigma_0,\eta_0)}{\partial\eta}\cdot(\eta-\eta_0)\geqq 0\ (\leqq 0)$$

なる部分を $\Delta^+_{i\delta}\ (\Delta^-_{i\delta})$ とかく。さらに,

$$\Delta_\delta=\cap\Delta_{i\delta},\quad \Delta^*_\delta=\cap\Delta^\pm_{i\delta},\quad \Delta_\delta=\bigcup_*\Delta^*_\delta$$

補題1.1 $\delta>0$ が存在して, $\Delta_{i\delta}$では $H_i(\tau,\eta;\xi)=0$ の根 $\{\xi^\pm_{ij}(\tau,\eta)\}_{j=1,2,\cdots,m_i^\pm}$ $(\mathrm{Im}\,\xi^\pm_{ij}\gtrless 0)$ は,

$$(\xi-\xi_i)^{m_i}+\frac{\partial a_{im_i}}{\partial\tau}(\sigma_0,\eta_0)\cdot(\tau-\sigma_0)+\frac{\partial a_{im_i}}{\partial\eta}(\sigma_0,\eta_0)\cdot(\eta-\eta_0)=0$$

の根を主部とし, 誤差は $O(d^{\frac{2}{m_i}})$ である。

系 i) ($\Delta_{i\delta}$では,) $c_1 d^{\frac{1}{m_i}}<|\xi^\pm_{ij}(\tau,\eta)-\xi_i|,\ |\xi^\pm_{ij}(\tau,\eta)-\xi^\pm_{ik}(\tau,\eta)|<c_2 d^{\frac{1}{m_i}}$

ii) m_i：偶数のとき，$\Delta_{i\delta}^-$ において $\mathrm{Im}\,\tau \to 0$ とすると，$\mathrm{Im}\,\xi_{i1}^+$，$\mathrm{Im}\,\xi_{i1}^- \to 0$．$m_i$：奇数のときは，$\Delta_{i\delta}$ において $\mathrm{Im}\,\tau \to 0$ とすると，$\frac{\partial a_{im_i}}{\partial \tau}(\sigma_0 \eta_0) > 0$ なら $\mathrm{Im}\,\xi_{i1}^+ \to 0$，$\frac{\partial a_{im_i}}{\partial \tau}(\sigma_0 \eta_0) < 0$ なら $\mathrm{Im}\,\xi_{i1}^- \to 0$。そこで，$\Delta_\delta^*$ において，$\mathrm{Im}\,\tau \to 0$ とすれば実となる根を $\xi_{ij}^{(\pm)}$，そうでないものを $\xi_{ij}^{((\pm))}$ と区別してかくと，

$$c_1 \frac{\gamma}{d^{1-\frac{1}{m_i}}} < \left| \mathrm{Im}\,\xi_{ij}^{(\pm)}(\tau,\eta) \right| < c_2 \frac{\gamma}{d^{1-\frac{1}{m_i}}} \qquad (\gamma = -\mathrm{Im}\,\tau)$$

$$c_1\, d^{\frac{1}{m_i}} < \left| \mathrm{Im}\,\xi_{ij}^{((\pm))}(\tau,\eta) \right| < c_2\, d^{\frac{1}{m_i}}$$

が成りたつ。

iii) Δ_δ において，

$$\begin{array}{c} \\ \\ \\ k \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{m_i^\pm} C_{ij\pm}^{k}(\tau,\eta) \begin{pmatrix} B_1(\xi_{ij}^\pm(\tau,\eta)) \\ \vdots \\ B_\mu(\xi_{ij}^\pm(\tau,\eta)) \end{pmatrix}$$

$$+ \sum_{j=1}^{M} C_{0j\pm}^{k}(\tau,\eta) \begin{pmatrix} \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{B_1(\xi)\, \xi^{j-1}}{E_\pm(\xi)}\, d\xi \\ \vdots \\ \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{B_\mu(\xi)\, \xi^{j-1}}{E_\pm(\xi)}\, d\xi \end{pmatrix}$$

とかき表せて，$\{ C_{ij\pm}^{k}(\tau,\eta) \cdot d^{1-\frac{1}{m_i}},\ C_{0j\pm}^{k}(\tau,\eta) \}$ は Δ_δ で有界である。ただし，$E(\xi) = E_+(\xi) E_-(\xi)$，$E_\pm(\xi) = 0$ の根は上(下)半平面にあり，その次数はともに M．

1.2. Green 関数の Δ_δ における表現．

$${}^t E_+(x) = \left(\frac{1}{2\pi i} \int \frac{e^{ix\cdot\xi}}{\xi - \xi_{11}^+} d\xi, \cdots, \frac{1}{2\pi i} \int \frac{e^{ix\cdot\xi}}{\xi - \xi_{1m_1^+}} d\xi, \cdots\cdots, \frac{1}{2\pi i} \int \frac{e^{ix\cdot\xi}}{E_+(\xi)} d\xi, \cdots \frac{1}{2\pi i} \int \frac{e^{ix\cdot\xi}\, \xi^{M-1}}{E_+(\xi)} d\xi \right),$$

$$
{}^t\mathbb{E}_-(y)=\left(\frac{1}{2\pi i}\int\frac{e^{-iy\xi}}{\xi-\xi_{11}^-}d\xi,\ \cdots\cdots \frac{1}{2\pi i}\int\frac{e^{-iy\xi}}{\xi-\xi_{1m_1^-}^-}d\xi\cdots\cdots\frac{1}{2\pi i}\int\frac{e^{-iy\xi}}{E_-(\xi)}d\xi\cdots\frac{1}{2\pi i}\int\frac{e^{-iy\xi}\xi^{M-1}}{E_-(\xi)}d\xi\right),
$$

$$
B_\pm=\begin{pmatrix}
B_1(\xi_{11}^\pm)\cdots B_1(\xi_{1m_1^\pm}^\pm) & \cdots\cdots & \frac{1}{2\pi i}\oint\frac{B_1(\xi)}{E_\pm(\xi)}d\xi\cdots\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{B_1(\xi)\xi^{M-1}}{E_\pm(\xi)}d\xi\\
\vdots\qquad\qquad\vdots & & \vdots\qquad\qquad\qquad\vdots\\
B_\mu(\xi_{11}^\pm)\cdots B_\mu(\xi_{1m_1^\pm}^\pm) & \cdots\cdots & \frac{1}{2\pi i}\oint\frac{B_\mu(\xi)}{E_\pm(\xi)}d\xi\cdots\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{B_\mu(\xi)\xi^{M-1}}{E_\pm(\xi)}d\xi
\end{pmatrix},
$$

$$
Q_-=\left(\frac{1}{2\pi}\oint\widetilde{\mathbb{E}}_-(\xi)\,{}^t\widetilde{\mathbb{E}}_-(\xi)A(\xi)\,d\xi\right)^{-1}\qquad\left(\mathbb{E}_-(y)=\frac{1}{2\pi i}\int e^{-iy\xi}\widetilde{\mathbb{E}}_-(\xi)d\xi\right)
$$

$$
=\begin{pmatrix}
\frac{1}{iA'_\xi(\xi_{11}^-)} & & & \\
& \frac{1}{iA'_\xi(\xi_{12}^-)} & & \\
& & \ddots & \\
& & & \begin{pmatrix}
\frac{1}{2\pi}\oint\frac{E_+(\xi)H(\xi)}{E_-(\xi)}d\xi & \cdots & \frac{1}{2\pi}\oint\frac{E_+(\xi)H(\xi)\xi^{M-1}}{E_-(\xi)}d\xi\\
\vdots & & \vdots\\
\frac{1}{2\pi}\oint\frac{E_+(\xi)H(\xi)\xi^{M-1}}{E_-(\xi)}d\xi & \cdots & \frac{1}{2\pi}\oint\frac{E_+(\xi)H(\xi)\xi^{2M-2}}{E_-(\xi)}d\xi
\end{pmatrix}^{-1}
\end{pmatrix},
$$

$$
B=(B_+)^{-1}B_-Q_-=\mathfrak{B}Q_-
$$

とおくと,

補題 1.2. Δ_δ において,

$$
\begin{aligned}
G_c(x,y)&={}^t\mathbb{E}_+(x)\,B\,\mathbb{E}_-(y)\\
&={}^t\mathbb{E}_+(x)\,\mathfrak{B}\,Q_-\mathbb{E}_-(y).
\end{aligned}
$$

1.3. Δ_δ における Green 函数の評価について.

一般に,

$$
\|G_c\|_{\mathcal{L}(L^2\times L^2,\,C^1)}\leq\|G_c\|_{\mathcal{L}(L^2,\,L^2)}\leq\|G_c(x,y)\|_{x,y}
$$

であるが，Δ_δ ではこれらが同等になることを見てみよう。

いま，

$$N_\pm = \begin{pmatrix} |\mathrm{Im}\,\xi_{11}^\pm|^{-\frac{1}{2}} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & |\mathrm{Im}\,\xi_{1m_1^\pm}^\pm|^{-\frac{1}{2}} & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots \; 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbb{F}_\pm(x) = N_\pm^{-1}\,\mathbb{E}_\pm(x)$$

とおくと，$\mathbb{F}_\pm(x)$ の L^2 ノルムは有界となるから，

$$\left| \int \overline{\mathbb{F}_+(x)}\, G_c(x,y)\, {}^t\overline{\mathbb{F}_-(y)}\, dx\,dy \right| \leqq C \|G_c\|_{\mathcal{L}(L^2\times L^2,\, \mathbb{C}^1)}$$

（左辺の $|\cdot|$ は行列のノルムを表す）．また，

$$S_+ = \int_0^\infty \overline{\mathbb{F}_+(x)}\, {}^t\mathbb{F}_+(x)\, dx,$$

$$S_- = \int_0^\infty \mathbb{F}_-(y)\, {}^t\overline{\mathbb{F}_-(y)}\, dy$$

とおけば

$$\int \overline{\mathbb{F}_+(x)}\, G_c(x,y)\, {}^t\overline{\mathbb{F}_-(y)}\, dx\,dy = S_+ N_+ B N_- S_-$$

となる。ところで，

<u>補題1.3</u>　Δ_δ で $S_\pm$ は正値エルミート行列で，

$$c_1\, I_d < S_\pm < c_2\, I_d. \qquad (I_d = \text{単位行列})$$

であるから，

$$c_1 |N_+ B N_-| < \left| \int \mathbb{F}_+(x) G_c(x,y) \overline{\mathbb{F}_-}(y) dx dy \right| < c_2 |N_+ B N_-|$$

がΔ_δで成りたつ。また他方，Δ_δにおいては

$$\| G_c(x,y) \|_{x,y} = \| {}^t\mathbb{E}_+(x) B \mathbb{E}_-(y) \|_{x,y}$$
$$\leq C |N_+ B N_-|$$

が成り立っている。また同様に，Δ_δにおいて$\| (\frac{\partial}{\partial x})^k G_c(x,y) \|_{x,y} \leq C_k |N_+ B N_-|$ が成りたつから

補題 1.4　Δ_δにおいて，

$$\sum_{k=0}^{m-1} \| (\frac{\partial}{\partial x})^k G_c(x,y) \|_{x,y} \leq C |N_+ B N_-| \leq C' \| G_c \|_{\mathcal{L}(L^2 \times L^2, C^1)}.$$

さて，　Δ_δ^*において　$N_\pm$の各要素を，

$$\mathrm{Im}\, \xi_{ij}^{(\pm)} \longrightarrow \frac{\gamma}{d^{1-\frac{1}{m_2}}}$$

$$\mathrm{Im}\, \xi_{ij}^{((\pm))} \longrightarrow d^{\frac{1}{m_2}}$$

とおき直して得られる行列を$D_\pm^*$とすると，

命題 1　Δ_δ^*において，

$$\| G_c \|_{\mathcal{L}(L^2, L^2)} \sim |D_+^* B D_-^*|$$

i.e.

$$c_1 |D_+^* B D_-^*| \leq \| G_c \|_{\mathcal{L}(L^2, L^2)} \leq c_2 |D_+^* B D_-^*|$$

また，

$$D_- = \begin{pmatrix} \overbrace{\begin{matrix} d^{-1+\frac{1}{m_1}} & & \\ & \ddots & \\ & & d^{-1+\frac{1}{m_1}} \end{matrix}}^{m_1^-} & & \\ & \ddots & \\ & & \begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix} \end{pmatrix}$$

とおけば、

<u>命題1'</u>　Δ_δ^* において、

$$\|G_\tau\|_{\mathcal{L}(L^2,L^2)} \sim |D_+^* \mathcal{B} D_- D_-^*|.$$

したがって、

<u>定理I</u>　(P)が L^2-well posed であるならば、任意の実点 (σ_0, τ_0) に対し、Δ_δ^* がとれて、そこでは

$$|D_+^* B D_-^*| < \frac{C}{8}$$

i.e.

$$|D_+^* \mathcal{B} D_- D_-^*| < \frac{C}{8}$$

が成り立つ。

さて、

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} \begin{matrix} \beta_{11,11} & \cdots & \beta_{11,1m_1^-} \\ \vdots & & \vdots \\ \beta_{1m_1^+,11} & \cdots & \beta_{1m_1^+,1m_1^-} \end{matrix} & \cdots \\ \vdots & \begin{matrix} \beta_{01,01} & \cdots & \beta_{01,0M} \\ \vdots & & \\ \beta_{0M,01} & \cdots & \beta_{0M,0M} \end{matrix} \end{pmatrix},$$

$$(B_+)^{-1} = \begin{pmatrix} r_{11,1} & \cdots & r_{11,\mu} \\ \vdots & & \vdots \\ r_{1m_1^+,1} & \cdots & r_{1m_1^+,\mu} \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix}$$

とかくと，

<u>定理Iの系</u>　(P) が L^2-well posed であるならば，任意の実点 (σ_0, τ_0) に対し，Δ_δ がとれて，そこでは

$$\text{(a)} \begin{cases} |\beta_{ij,\ell h}|\, d^{-\frac{1}{2m_i}+\frac{1}{2m_\ell}} < C\frac{d}{\delta} & \left(\begin{matrix} i=1,\cdots,N, & \ell=1,\cdots,N \\ j=1,\cdots,m_i^+, & h=1,\cdots,m_\ell^- \end{matrix}\right), \\ |\beta_{0j,\ell h}|\, d^{\frac{1}{2m_\ell}} < C\frac{d}{\delta} & \left(j=1,\cdots,M,\ \begin{matrix} \ell=1,\cdots,N \\ h=1,\cdots,m_\ell^- \end{matrix}\right), \\ |\beta_{ij,0h}|\, d^{-\frac{1}{2m_i}} < C\frac{1}{\delta} & \left(\begin{matrix} i=1,\cdots,N \\ j=1,\cdots,m_i^+ \end{matrix},\ h=1,\cdots,M\right), \\ |\beta_{0j,0h}| < C\frac{1}{\delta} & (j=1,\cdots,M,\ h=1,\cdots,M), \end{cases}$$

$$\text{(b)} \begin{cases} |r_{ij,k}|\, d^{-\frac{1}{2m_i}} < C\frac{1}{\delta} & \left(\begin{matrix} i=1,\cdots,N \\ j=1,\cdots,m_i^+ \end{matrix}\right), \\ |r_{0j,k}| < C\frac{1}{\delta} & (j=1,\cdots,M) \end{cases}$$

が成りたつ。

§2. 十分条件について,

実点(σ_0, τ_0)が正則点であるとは，その点において$A=0$の実根$\xi=\xi_i$がm_i重根であるとすれば，その近傍でそれらはm_i重根かまたは単根としてしか現れないときをいうことにしよう。(σ_0, τ_0)が正則点であるとするとき，その点中心の分解$A=\prod_{i=1}^{\mu} H_i \cdot E$において，$m_i \geqq 2$に対応する$i$については，$(\sigma_0, \tau_0)$を通る実解析的曲面$S_i : \sigma = \varphi_i(\tau)$がとれて，$H_i=0$の$m_i$重根は丁度$S_i$上にのっていることがわかる。

補題2.1. 正則点(σ_0, τ_0)の近傍Uにおいて，$U \cap S_i$の任意の点(σ_1, τ_1)に一様な$\Delta_\delta(\sigma_1, \tau_1)$を対応させて，$\Delta^*_\delta(\sigma_1, \tau_1)$において，

$$c_1 \frac{\gamma}{\mathrm{dis}((\sigma, \tau), (\sigma_1, \tau_1))^{1-\frac{1}{m_i}}} < \left| \mathrm{Im}\, \xi_{ij}^{(\pm)} \right| < c_2 \frac{\gamma}{\mathrm{dis}((\sigma, \tau), (\sigma_1, \tau_1))^{1-\frac{1}{m_i}}},$$

$$c_1\, \mathrm{dis}((\sigma, \tau), (\sigma_1, \tau_1))^{\frac{1}{m_i}} < \left| \mathrm{Im}\, \xi_{ij}^{((\pm))} \right| < c_2\, \mathrm{dis}((\sigma, \tau), (\sigma_1, \tau_1))^{\frac{1}{m_i}}$$

が成り立つ（c_1, c_2は(σ_1, τ_1)に無関係）.

そこで，$m_i \geqq 2$のとき，

$$d_i = \mathrm{dis}((\sigma, \tau), S_i)$$

とおけば，

系　正則点(σ_0, τ_0)の近傍U（$\gamma > 0$の側）において，

$$c_1 \frac{\gamma}{d_i^{1-\frac{1}{m_i}}} < \left| \mathrm{Im}\, \xi_{ij}^{(\pm)}(\sigma, \tau) \right| < c_2 \frac{\gamma}{d_i^{1-\frac{1}{m_i}}},$$

$$c_1\, d_i^{\frac{1}{m_i}} < \left|\mathrm{Im}\, \xi_{ij}^{((\pm))}(\tau,\eta)\right| < c_2\, d_i^{\frac{1}{m_i}}$$

$$\left(\begin{array}{l}\text{ただし，} m_i = 1 \text{ なる } i \text{ については} \\ \quad c_1\,\gamma < \left|\mathrm{Im}\,\xi_{i1}^{(\pm)}(\tau,\eta)\right| < c_2\,\gamma\end{array}\right).$$

また，§1の考察を詳しく見なおせば，

補題2.2. 正則点の近傍（$\gamma>0$の側）において，

$$\sum_{k=0}^{m-1} \left\|\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^k G_c(x,y)\right\|_{x,y} \leq C\left|N_+BN_-\right| \leq C'\|G_c\|_{\mathcal{L}(L^2,L^2)}.$$

そこで，$N_\pm$において，

$$\mathrm{Im}\,\xi_{ij}^{(\pm)} \longrightarrow \frac{\gamma}{d_i^{1-\frac{1}{m_i}}}$$

$$\mathrm{Im}\,\xi_{ij}^{((\pm))} \longrightarrow d_i^{\frac{1}{m_i}}$$

とおきかえたものを$D_\pm^*$，また，

$$\tilde{\mathcal{D}}_- = \begin{pmatrix} d_1^{-1+\frac{1}{m_1}} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & d_1^{-1+\frac{1}{m_1}} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

とおけば，

命題2. 正則点の近傍（$\gamma>0$の側）において，

$$\|G_c\|_{\mathcal{L}(L^2,L^2)} \sim \left|\tilde{D}_+^* B\, \tilde{D}_-^*\right| \sim \left|\tilde{D}_+^* \mathcal{B}\, \tilde{\mathcal{D}}_-\, \tilde{D}_-^*\right|.$$

<u>定理II</u>　実点がすべて正則点であるような場合には，(P)がL^2-well posedになるための必要十分条件は，各実点の近傍($\gamma>0$)で，

$$|\tilde{D}_+^* B \tilde{D}_-^*| < \frac{C}{\gamma},$$

すなわち，

$$|\tilde{D}_+^* \mathcal{B} \tilde{\mathcal{N}}_- \tilde{D}_-^*| < \frac{C}{\gamma}$$

が成りたつことである。

<u>定理IIの系</u>　実点がすべて正則点である場合には，各実点の近傍($\gamma>0$)で，

$$(\tilde{a})\begin{cases} |\beta_{ij,\ell h}|\, d_i^{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{m_i})}\, d_\ell^{-\frac{1}{2}(1-\frac{1}{m_\ell})} < C \\ |\beta_{0j,\ell h}|\, d_\ell^{-\frac{1}{2}(1-\frac{1}{m_\ell})} < C\left(\frac{1}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}} \\ |\beta_{ij,0h}|\, d_i^{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{m_i})} < C\left(\frac{1}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}} \\ |\beta_{0j,0h}| < \frac{1}{\gamma} \end{cases}$$

がみたされていれば，(P)はL^2-well posedになる。